Blatt 13

Aufgabe 1:

a) $C = e(A)$

Die gesuchte Fkt., die C rekursiv aufzählt ist einfach $c(n) = e(F(n))$ bzw. $c = e \circ g$

b) $B \leq A$ („B ist reduzierbar auf A") mittels g

d.h. $w \in B \iff g(w) \in A$

g ist zwar total und berechenbar, aber damit nicht unbedingt umkehrbar, daher geht $h(n) = g^{-1}(F(n))$ NICHT!

Es bleibt nichts anderes übrig, als ganz Γ^* aufzuzählen und für jedes $w \in \Gamma^*$ $g(w)$ mit allen $F(\ell)$ zu vergleichen.

Fassen wir das in eine Funktion:

$h(0)$ sei das „kleinste" Wort in B (gefunden durch ausprobieren)

$$h(n) = \begin{cases} w = \text{das } m\text{-te Wort in } \Gamma^*, \text{ falls } n = 2^m \cdot 3^\ell \text{ und } F(\ell) = g(w) \; * \\ h(n-1) \text{ sonst} \end{cases}$$

* h hat nur einen Parameter, wir brauchen aber zwei (m-tes Wort aus Γ^*, ℓ-tes aus A). Daher brauchen wir eine Abbildung von $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$n = 2^m \cdot 3^\ell$ tut dies, lässt aber große Lücken

$1 = 2^0 \cdot 3^0$; $2 = 2^1 \cdot 3^0$; $3 = 2^0 \cdot 3^1$; $4 = /$; $5 = /$; $6 = 2^1 \cdot 3^1$..

Besser erfüllt die $c(x,y)$-Funktion von S. 111 die Aufgabe ...

Aufgabe 2:

a) $L = \{w \mid \forall w'\ M_w$ anges. auf w' hält $\Leftrightarrow M_{w'}$ auf w anges. hält nicht$\}$

„$\forall w'$" heisst insbesondere auch für $w' = w$.

Dann folgt aber: M_w angesetzt auf w hält

gdw. M_w angesetzt auf w hält nicht ↯

$\Rightarrow L = \emptyset \Rightarrow L$ ist rek. aufzählbar = semi entscheidbar.

b) Der Satz auf S. 122 besagt:

A entscheidbar $\Leftrightarrow$ $A, \bar{A}$ sind beide semi-entscheidbar.

Wir zeigen, dass $\overline{L'}$ semi-entscheidbar, nicht aber entscheidbar ist.

$\Rightarrow L'$ kann nicht semi-entscheidbar sein (sonst wäre $\overline{L'}$ entscheidbar)

$\overline{L'} = \{w \mid \exists w' : M_w$ anges. auf w' hält und $M_{w'}$ anges. auf w hält$\}$

1. $\overline{L'}$ ist semi-entscheidbar. semi-entscheidbar $\Leftrightarrow$ rekursiv aufzählbar: Wir können eine Maschine bauen, die $\overline{L'}$ aufzählt, indem wir sie einfach alle Paare (w, w') erzeugen lassen und dann für jedes Paar die Bedingungen von $\overline{L'}$ testen und wenn sie erfüllt sind w ausgeben.

2. $\overline{L'}$ ist nicht entscheidbar. Dazu reduzieren wir das Halteproblem auf $\overline{L'}$ (i.Z. $H_0 \leq \overline{L'}$) mittels folgender Fkt:

Eingabe w. Baue daraus w'' mit folgender Eigensch.:

sei w_0 Kodierung einer TM M_{w_0}, die immer hält.

Falls $w' \neq w_0$ gehe in Endlosschleife;

sonst lösche Band und fahre fort wie M_w.

d.h. $w \in H_0 \Leftrightarrow M_w(\lambda)$ hält $\Leftrightarrow M_{w''}(w_0)$ hält $\Leftrightarrow w'' \in \overline{L'}$

Das Halteproblem ist also nur ein Spezialfall von $\overline{L'}$.

$\Rightarrow \overline{L'}$ ist nicht entscheidbar $\Rightarrow$ fertig!

Aufgabe 3:

reduzierbar heisst: $\exists$ totale berechenbare Fkt, die in unserem Fall jede reguläre Sprache auf L abbildet.

Wählen wir z.B. $L = \{0,1\}$.
Bauen wir die Überführungsfkt. g, die eine reguläre Sprache T in L überführt:

$$g: T \to L : w \mapsto \{0,1\}$$
$$g(w) = \begin{cases} 1 & ; w \in L^* \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow T \leq L$

($\Rightarrow$ die regulären Sprachen sind alle entscheidbar)

Aufgabe 4:

Als Beweis wollen wir den Satz von Rice (S. 19) verwenden. Daher müssen wir zuerst prüfen, ob die Voraussetzungen erfüllt sind:

Die Sprache der Palindrome ist kontextfrei, weil man leicht eine Typ 2 Grammatik angeben kann.
$\Rightarrow \exists$ Turingmaschine, die die Sprache der P. erkennt (Typ 2 $\subsetneq$ Typ 0 [Typ 0 $\in \mathcal{X}_{Typ 0}$ ist Turing-berechenbar])
Sicher gilt auch $\exists$ TM, die die Sprache der P. nicht erk.

$\Rightarrow \emptyset \subsetneq S \subseteq R$
unsere Sprachen (bel. viele für bel. Palindrome, aber eben nicht = R = alle turingbaren Fkt)

$\Rightarrow$ Satz von Rice ist anwendbar

$\Rightarrow$ Die Sprache ist nicht entscheidbar $\square$

Aufgabe 5:

a) Es gilt $H_0 \leq \{w\#x \mid M_w$ ... leere Band hält ... $\}$
$\Rightarrow$ unentscheidbar (z.B. $g(w') = w'\#\varepsilon$)

b) Entscheidbar: Simuliere M_w $|x|^3$ Schritte lang.
Hat M_w mit x auf dem Band gehalten akzeptiere, sonst verwerfe.

c) Nicht entscheidbar:
Wir zeigen $H_0 \leq S_{c)}$.
Dazu bauen wir aus der Eingabe w' ~~inh~~ eine TM M_{w*} mit zwei Bändern, die auf einem Band $M_{w'}$ simuliert und zusätzlich auf dem Ausgabeband bei jedem Schritt ein Zeichen schreibt.
$\Rightarrow$ H_0 ist nur ein Spezialfall von c), also eine Teilmenge der Sprache von c)
$\Rightarrow$ c) ist nicht entscheidbar, weil es H_0 schon nicht ist.